

Aula 41

Proposição: Uma matriz A , $n \times n$, de coeficientes constantes tem n vectores próprios associados linearmente independentes se e só se é diagonalizável.

Definição: Dada uma matriz A de coeficientes constantes chama-se **multiplicidade algébrica** dum valor próprio λ de A à sua multiplicidade como raíz do polinómio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.

Chama-se **multiplicidade geométrica** dum valor próprio λ à dimensão do correspondente espaço próprio, ou seja, ao número de vectores próprios linearmente independentes associados a λ .

Proposição: Seja A uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes e λ um valor próprio. Então

$$1 \leq \text{mult. geométrica de } \lambda \leq \text{mult. algébrica de } \lambda \leq n$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0.$$



$\lambda = 2$ multiplicidade algébrica = 2, geométrica = 1.

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2$$
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Uma só solução linearmente independente da forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$,

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Definição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y},$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, designa-se por **matriz solução fundamental**, ou **solução matricial fundamental**, qualquer matriz $X(t)$ cujas colunas formam uma base do espaço das soluções do sistema homogéneo

$$X(t) = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \right]}_{n \text{ sols. lin. independentes}}.$$

Designa-se por **matriz solução principal**, ou **solução matricial principal**, em $t_0 \in I$, a (única) matriz solução fundamental $Y_{t_0}(t)$ tal que $Y_{t_0}(t_0) = I$, ou seja, tal que as suas colunas, além de serem uma base do espaço das soluções, satisfazem especificamente

$$\mathbf{y}_1(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_2(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{y}_n(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proposição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y},$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e dada uma matriz $X(t)$ solução fundamental do sistema, então a solução geral do sistema é dada por

$$\mathbf{y}(t) = X(t)\mathbf{c} = c_1 \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_1(t) \\ \vdots \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

com

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

qualquer vector de componentes constantes.

Se $Y_{t_0}(t)$ é a solução principal em t_0 , então a solução do problema de valor inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ é dada por

$$\mathbf{y}(t) = Y_{t_0}(t)\mathbf{y}_0.$$

Proposição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y},$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então, se $Y_{t_0}(t)$ é a solução matricial principal do sistema em $t_0 \in I$ e $X(t)$ é uma qualquer solução matricial fundamental, tem-se

$$Y_{t_0}(t) = X(t)X^{-1}(t_0).$$

Proposição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y},$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a matriz $X(t)$ é uma solução matricial fundamental do sistema se e só se satisfaz a EDO matricial

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) \\ \det X(t) \neq 0. \end{cases}$$

A matrix $Y_{t_0}(t)$ é a solução matricial principal do sistema em $t_0 \in I$ se e só se satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dY_{t_0}(t)}{dt} = A(t)Y_{t_0}(t) \\ Y_{t_0} = I. \end{cases}$$

Definição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo, de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y},$$

chama-se **exponencial matricial** de At , e representa-se por e^{At} , à (única) solução matricial principal do sistema em $t_0 = 0$, ou seja, a única solução do problema

$$\begin{cases} \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} \\ e^{A0} = I. \end{cases}$$

Proposição: Dada uma matriz A , $n \times n$, a exponencial matricial e^{At} é dada pela série

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Proposição: Dadas matrizes $A, B, n \times n$, tem-se

i) Em $t = 0$, $e^{At} = e^{[0]} = I$.

ii) Se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

é uma matriz por blocos, então e^{At} também é uma matriz por blocos e tem-se

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{A_k t} \end{bmatrix}$$

iii) Se A e B comutam, ou seja, se $AB = BA$ então $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

iv) e^{At} é sempre não singular, com inversa $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

v) Se

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

então

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}.$$